

# Математический анализ

## Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### Лекция 2.7

#### Аннотация

Векторная функция скалярного аргумента, ее предел и производная. Векторная функция постоянной длины.

## 1 Векторная функция скалярного аргумента

### *Определение*

**Векторной функцией скалярного аргумента** называется функция, значениями которой являются векторы, а аргументами - числа.

Обозначение:  $\vec{r}(t)$

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

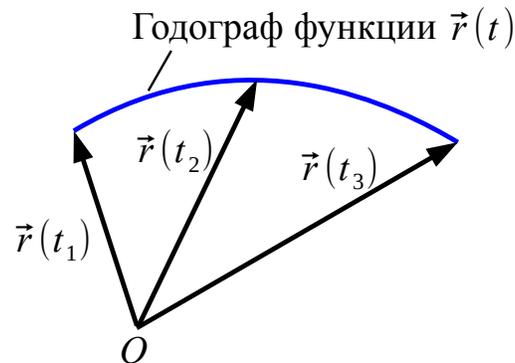
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если  $z(t) = 0 \forall t$ , то пишут:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

### *Определение*

Пусть векторы  $\vec{r}(t)$  при всех значениях аргумента  $t$  приложены к одной точке  $O$ . Линия, описываемая в пространстве концом вектора  $\vec{r}(t)$  при непрерывном изменении  $t$ , называется **годографом** функции  $\vec{r}(t)$ .



Поместим начало декартовой системы координат в точку  $O$ . Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{- в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{- на плоскости,}$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  - координаты векторной функции  $\bar{r}(t)$

## 2 Предел и непрерывность

*Определение*

Вектор  $\bar{a}$  называется **пределом** векторной функции  $\bar{r}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t) - \bar{a}| = 0.$$

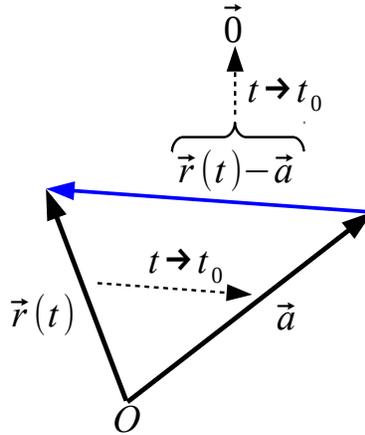
Обозначение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}.$$

Здесь  $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$  - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}.$$

При  $t \rightarrow t_0$  вектор  $\vec{r}(t) - \vec{a}$  переходит в нулевой вектор  $\vec{0}$ , что соответствует переходу вектора  $\vec{r}(t)$  в вектор  $\vec{a}$ .



*Теорема (о пределе в координатной форме)*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z \end{cases}$$

*Определение*

Векторная функция  $\vec{r}(t)$  называется **непрерывной** в точке  $t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Обозначение:  $\vec{r}(t) \in C(t_0)$ .

*Теорема (о непрерывности в координатной форме)*

$$\bar{r}(t) \in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) \in C(t_0) \\ y(t) \in C(t_0) \\ z(t) \in C(t_0) \end{cases}$$

*Свойства пределов векторных функций:*

- 1) если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$ , то  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$ ,
- 2)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$ ,
- 3)  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\bar{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$ ,
- 4)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$ ,
- 5)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$

Здесь  $\cdot$  - скалярное произведение и  $\times$  - векторное произведение.

### 3 Производная векторной функции

*Определение*

**Производной** функции  $\bar{r}(t)$  в точке  $t_0$  называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Обозначение:  $\bar{r}'(t_0)$ .

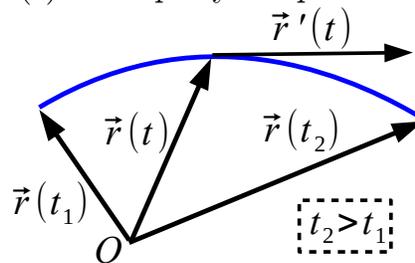
*Теорема (о существовании производной векторной функции)*

$$\exists \bar{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

причем  $\bar{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

*Геометрический смысл производной:*

Производная  $\vec{r}'(t)$  - это вектор, направленный по касательной к годографу функции  $\vec{r}(t)$  в сторону возрастания параметра  $t$ .



Так как  $\vec{r}'(t)$  направлен по касательной к годографу функции  $\vec{r}(t)$ , то уравнение касательной к этой кривой в точке  $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

*Физический смысл производной:*

Производная  $\vec{r}'(t)$  - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции  $\vec{r}(t)$ .

*Правила дифференцирования:*

- 1)  $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 + \vec{r}'_2$
- 2)  $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$
- 3)  $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}'_2$
- 4)  $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}'_2$

Здесь  $\cdot$  - скалярное произведение,  $\times$  - векторное произведение,  $f = f(t)$  - обычная функция.

## 4 Векторная функция постоянной длины

*Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)*

Если длина вектора  $\vec{r}(t)$  постоянна, то он ортогонален своей производной и  $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$ .

Геометрически конец вектора  $\vec{r}(t)$  все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке  $O$ , сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.